ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1980

MATHEMATIQUES I

TA

(Deux pages dactylographiées)

N.B. Les parties I d'une part, II et III d'autre part sont indépendantes.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ désignent l'ensemble des entiers naturels et celui des réels.
Par fonction on entend application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $a_{2p} = 0$; $a_{2p+1} = \frac{p}{(2p+1)(2p+3)}$

On désigne par R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$.

Pour $t \in]-R,+R[$, on pose : $f(t) = \sum_0^{+\infty} a_n t^n$.

I

I-1°/ Déterminer R.

I-2°/ En utilisant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle : $\frac{X}{(2X+1)(2X+3)}$, expliciter f(t) pour t non nul, tel que $|t| < R$.
On considère comme connu le développement en série entière :

$$\text{Arg tht} = \sum_0^{+\infty} \frac{t^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} \quad , |t| < 1$$

I-3°/ Trouver, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de $f(\frac{1}{2})$.

I-4°/ Trouver un équivalent aussi simple que possible de f(t) lorsque t tend vers R par valeurs inférieures.

II

On considère l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad (E)$$

Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, ouvert et non vide, $\mathcal{E}(I)$ désigne l'ensemble des solutions de (E) sur I.

II-1°/ Montrer qu'il existe un unique polynôme normalisé $P = \sum_{q=0}^{m} \xi_q X^q$, avec $\xi_m = 1$, tel que la fonction $x \longmapsto P(x)$ appartienne à $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

II-2°/ Soit ψ un élément quelconque de $\mathcal{E}(\,]1,+\infty[\,)$.
- Montrer que $x \longmapsto \frac{\psi(x)}{P(x)}$ détermine une application h, de classe C^2, de $]1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- Calculer la dérivée sur $]1,+\infty[$ de la fonction : $x \longmapsto (1-x^2)\, h'(x)\, [P(x)]^2$

En déduire une expression de $\psi(x)$ ne faisant intervenir aucun symbole d'intégration, et une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(\,]1,+\infty[\,)$.

II-3°/ En reprenant la méthode du II-2°, trouver sans nouveau calcul une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(\,]-\infty,-1[\,)$.

II-4°/ Dire pourquoi la méthode du II-2° ne s'applique pas à l'intervalle $]-1,+1[$. Montrer qu'elle s'applique cependant à des sous-intervalles convenablement choisis de $]-1,+1[$; trouver une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}(\,]-1,+1[\,)$.

.../...

II-5°/ Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

III

III-1°/ Trouver un couple (A,B) de polynômes tel que l'équation différentielle :

$$A(t)\,\frac{d^2z}{dt^2} + B(t)\,\frac{dz}{dt} + 6\,z = 0 \qquad (E')$$

possède la propriété suivante :
Pour tout intervalle $]\alpha,\beta[$ tel que $\alpha\beta > 0$, et pour toute fonction $\psi \in \mathcal{E}(]\alpha,\beta[)$, la fonction ϕ définie par $\phi(t) = \psi(\frac{1}{t})$ est solution de (E') sur $(\,]\frac{1}{\beta},\frac{1}{\alpha}[\,)$.

III-2°/ Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E') ainsi obtenue.

- En déduire que la fonction $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ est solution de (E) sur $]1,+\infty[$, et aussi sur $]-\infty,-1[$.

III-3°/ Utiliser II et III pour retrouver le calcul explicite de f(t) pour t non nul, tel que $|t| < 1$.

*****
***
*

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail